



A megújuló energiaforrások matematikája: képletgyűjtemény és példatár

Készítette

Pesák Dóra Zita
matematika BSc
(tanári minor)
szakos hallgató

Témavezető

prof. dr. Mika János
egyetemi tanár
Oláhné dr. Téglási Ilona
egyetemi docens

EGER, 2025

Tartalomjegyzék

Bevezetés	4
1. A megújuló energiaforrások fajtái és általános értékelése	5
1.1. Bioenergia	5
1.1.1. A bioenergia típusai és hasznosítása	5
1.1.2. Előnyök	6
1.1.3. Hátrányok	6
1.2. Geotermikus energia	6
1.2.1. A geotermikus energia típusai és felhasználása	7
1.2.2. Előnyök	7
1.2.3. Hátrányok	8
1.3. Napenergia	8
1.3.1. A napenergia hasznosításának típusai	8
1.3.2. Előnyök	8
1.3.3. Hátrányok	9
1.4. Szélenergia	9
1.4.1. A szélenergia hasznosítása	9
1.4.2. Előnyök	9
1.4.3. Hátrányok	10
1.5. Vízenergia	10
1.5.1. A vízenergia forrásai és típusai	10
1.5.2. A vízenergia fenntarthatósága és hatásai	11
2. Felhasznált képletek	12
2.1. A bioenergia fizikai alapjai	12
2.2. A geotermikus energia fizikai alapjai	12
2.3. A geotermikus energia gazdaságossága	13
2.4. A napelemek teljesítménye	13
2.5. A napelem által termelt energia időfüggése	13
2.6. A napenergia gazdaságossága	14
2.7. A szélenergia fizikai alapjai	14
2.8. A Betz-határ és a turbinák hatásfoka	15

2.9.	A szélenergia-termelés időfüggése	15
2.10.	Szélsébség eloszlás modell	15
2.11.	A szélenergia gazdaságossága	16
2.12.	A vízenergia matematikai számítása	16
2.13.	Árapály- és hullámenergia matematikája	17
3.	Feladatok	19
3.1.	Bioenergia	19
3.2.	Geotermikus energia	20
3.3.	Napenergia	22
3.4.	Szélenergia	23
3.5.	Vízenergia	24
4.	Megoldások	27
4.1.	Bioenergia	27
4.2.	Geotermikus energia	29
4.3.	Napenergia	32
4.4.	Szélenergia	36
4.5.	Vízenergia	40
5.	Következtetések	45
6.	Összefoglalás	46
7.	Függelék: Matematikai jelölések és fogalmak	47
7.1.	Prefixumok	47
7.2.	Állandók	47
7.3.	Képletek	48
7.3.1.	A tiszta víz és a tengervíz sűrűsége	49
	Köszönetnyilvánítás	50
	Irodalomjegyzék	51

Bevezetés

A fenntartható fejlődés és a megújuló energiaforrások használata napjaink egyik legfontosabb globális kérdésévé vált. Az egyre növekvő energiaigény, valamint a fosszilis energiahordozók környezeti hatásai sürgetővé teszik az alternatív megoldások keresését. A megújuló energiaforrások — mint a nap-, szél-, víz-, bio- és geotermikus energia — nemcsak környezetbarát módon biztosítanak energiát, hanem hosszú távon fenntartható alternatívát is jelentenek.

A matematika kulcsszerepet játszik a megújuló energiaforrások vizsgálatában, tervezésében és optimalizálásában. A különböző energiaátalakítási folyamatok megértése és hatékonyságuk elemzése számos matematikai eszközt igényel, beleértve az arányosságot, függvényeket, deriválást és egyéb modellezési technikákat. Ezért a matematika oktatásában is egyre nagyobb szerepet kapnak a gyakorlati, valós életből vett példák, amelyek segítik a diákokat a tanult elméleti ismeretek alkalmazásában.

Jelen dolgozat célja egy olyan példatár összeállítása, amely segíti a matematika tanítását a megújuló energiaforrások témakörén keresztül. A feladatok egyrészt lehetőséget adnak a matematikai készségek gyakorlására, másrészt hozzájárulnak a diákok fenntarthatósági szemléletének kialakításához. A példatár elsősorban matematika-tanárok számára készült, akik tanóráikon szeretnék a megújuló energiák témáját beépíteni az oktatásba.

A dolgozat felépítése a következő: először bemutatja a különböző megújuló energiaforrásokat és azok matematikai hátterét, majd részletes feladatgyűjteményt tartalmaz, amely két szempont szerint is rendszerezhető – az energiaforrások típusa és az alkalmazott matematikai módszerek szerint. A dolgozat végén összegzés és következtetések találhatók, valamint egy függelék, amely a matematikai jelöléseket és fogalmakat tartalmazza.

Ez a példatár nemcsak a matematika oktatásának színesítésére szolgál, hanem arra is, hogy a diákok betekintést nyerjenek a megújuló energiák jelentőségébe és alkalmazásának lehetőségeibe.

1. fejezet

A megújuló energiaforrások fajtái és általános értékelése

A megújuló energiaforrások olyan természetes eredetű energiák, amelyek természetes folyamatok révén folyamatosan megújulnak, így hosszú távon is fenntarthatók.

1.1. Bioenergia

A bioenergia¹ a növények, állati hulladékok és egyéb szerves anyagok elégetésével vagy biológiai lebontásával előállított energiaforma. Ez az egyik legrégebbi energiatermelési módszer, amelyet már az emberiség kezdetétől fogva használnak. A bioenergia forrásai közé tartoznak a mezőgazdasági hulladékok, faapríték, trágya, kommunális szerves hulladék és energiaültetvények.

1.1.1. A bioenergia típusai és hasznosítása

1. Szilárd bioenergia (biomassza)

- Tűzifa, pellet, faapríték vagy egyéb növényi hulladék elégetése hőtermelés céljából.
- Leggyakoribb alkalmazása háztartások és erőművek fűtésére.

2. Folyékony bioenergia (bioüzemanyagok)

- *Bioetanol*: Kukoricából, cukornádból vagy egyéb növényi alapanyagokból előállított alkohol, amelyet benzin helyettesítésére vagy keverésére használnak.
- *Biodízel*: Növényi olajokból és állati zsírokból készült üzemanyag, amely dízelmotorokban alkalmazható.

¹ [31]

3. Gáz halmazállapotú bioenergia (biogáz)

- Szerves hulladék anaerob lebontásával keletkező metángáz.
- A metángáz használható villamos energia termelésére vagy fűtési célokra.

1.1.2. Előnyök

- **Megújuló és fenntartható** – Az erdők és növények megfelelő kezelése esetén a bioenergia folyamatosan pótolható.
- **Hulladékhasznosítás** – Csökkenti a mezőgazdasági és kommunális hulladékok mennyiségét.
- **Alacsony szén-dioxid-kibocsátás** – A növények fotoszintézis révén megkötik a szén-dioxidot, így az elégetés során keletkező CO_2 mennyisége kisebb, mint a fosszilis tüzelőanyagok esetében.

1.1.3. Hátrányok

- **Levegőszennyezés** – Az égetés során szállópor, szén-monoxid és egyéb szennyező anyagok keletkezhetnek.
- **Nagy földterületigény** – Az energiaültetvények termesztése versenyhelyzetet teremthet az élelmiszertermeléssel.
- **Alacsonyabb energiasűrűség** – A bioenergia energiatartalma alacsonyabb a fosszilis tüzelőanyagokhoz képest, így nagyobb mennyiség szükséges azonos energiamennyiség előállításához.

1.2. Geotermikus energia

A geotermikus energia² a Föld belső hőjéből származik, amely a bolygó keletkezése óta felhalmozódott hőenergia, illetve a radioaktív bomlás következtében folyamatosan termelődik. Ez az energiaforrás hosszú távon fenntartható, és számos alkalmazási lehetőséget kínál, különösen olyan területeken, ahol a geológiai adottságok kedvezőek (például vulkanikus övezetekben).³

² [15, 21]

³ [30]

1.2.1. A geotermikus energia típusai és felhasználása

„A villamosenergia termelés technológiáját alapvetően befolyásolja a geotermikus fluidum entalpiája. Hőmérsékletük alapján megkülönböztetünk alacsony, közepes és magas entalpiájú termálvizet.”⁴ A Magyar Geotermális Egyesület (MGtE) szerint a geotermikus fluidumokat hőmérsékletük⁵ alapján az alábbi kategóriákba sorolják:

1. Alacsony hőmérsékletű geotermikus energia

- 90–125 °C-os termálvizek, amelyeket fűtési célokra vagy fürdőkben használnak.
- Magyarországon is elterjedt, különösen a termálfürdők és mezőgazdasági üvegházak fűtésére.

2. Közepes hőmérsékletű geotermikus energia

- 125–150 °C-os hőmérsékletű forrásokat hőcserélők és turbinák segítségével használnak.
- Ipari és távfűtési rendszerekben alkalmazzák.

3. Magas hőmérsékletű geotermikus energia

- 150–225 °C-os hőmérsékletű vízgőz vagy forró víz felhasználásával villamos energiát termelnek geotermikus erőművekben.
- Leggyakrabban vulkanikus területeken található meg (pl. Izland, Japán, az USA nyugati államai).

4. Hőszivattyús rendszerek

- A talajhőmérsékletet (kb. 10–15 °C) hasznosítják fűtési és hűtési célokra hőszivattyúk segítségével.
- Lakossági és ipari létesítmények energiahatékony fűtésére is alkalmas.

1.2.2. Előnyök

- **Környezetbarát** – Nem termel szén-dioxidot vagy más káros anyagokat.
- **Folyamatosan elérhető** – Nem függ az időjárástól, így állandó energiaforrás.
- **Hosszú távon gazdaságos** – A működési költségek alacsonyak, miután a rendszerek kiépültek.

⁴ [25]

⁵ Fontos megjegyezni, hogy a hőmérsékleti határok nem egységesek, és különböző források eltérő értékeket adhatnak meg.

1.2.3. Hátrányok

- **Magas beruházási költségek** – A fúrás és az infrastruktúra kiépítése drága.
- **Földrajzi korlátok** – Nem minden régióban elérhető megfelelő hőmérsékletű geotermikus forrás.
- **Talajsüllyedés és földrengésveszély** – A mélyfúrások földtani hatásokat idézhetnek elő.

1.3. Napenergia

A napenergia a Napból érkező elektromágneses sugárzás formájában elérhető energia, amelyet különféle technológiák segítségével villamos és hőenergiává lehet alakítani. Ez az egyik legnagyobb potenciállal rendelkező megújuló energiaforrás, mivel a Földre érkező napsugárzás mennyisége messze meghaladja az emberiség éves energiaigényét.

1.3.1. A napenergia hasznosításának típusai

1. Fotovoltaikus (PV) rendszerek

- A napsugárzást közvetlenül villamos energiává alakítják félvezető anyagokat tartalmazó napelemek segítségével.
- Legelterjedtebb formája a lakossági és ipari napelemes rendszerek.

2. Napkollektoros rendszerek

- A Nap hőenergiáját használják fel melegvíz előállítására vagy fűtésre.
- Jellemzően háztartásokban, medencék fűtésére vagy távfűtési rendszerekben alkalmazzák.

3. Naphőerőművek

- A napenergiát tükrök segítségével koncentrálják egy központi pontba, ahol hőenergiává alakul, majd ezt turbinák hajtására használják.
- Elsősorban nagy léptékű, közüzemi villamosenergia-termelésre alkalmas technológia.

1.3.2. Előnyök

- **Korlátlan és ingyenes energiaforrás** – A Napból érkező energia gyakorlatilag végtelen, és használata nem jár közvetlen költségekkel.

- **Környezetbarát** – Nem bocsát ki szén-dioxidot vagy más szennyező anyagot működés közben.
- **Decentralizált energiaellátás** – Lakossági rendszerek révén csökkenthető az energiahálózattól való függés.

1.3.3. Hátrányok

- **Időjárás- és napszakfüggő termelés** – Az energiatermelés csak napsütéses időben lehetséges, éjszaka és felhős időben korlátozott.
- **Energiatárolási igény** – A termelés és fogyasztás időbeli eltérése miatt akkumulátorokra vagy hálózati kiegyenlítésre van szükség.
- **Magas kezdeti beruházási költség** – Bár hosszú távon megtérül, a napelemes rendszerek telepítése jelentős kiadással járhat.

1.4. Szélenergia

A szélenergia a légmozgások — vagyis a szél — mozgási energiáját hasznosítja. A szelet a Föld légkörének felmelegedése, a felszín különböző hőkapacitása és a Föld forgása idézi elő — vagyis a Napból származó energia közvetett formája. A szélenergia átalakítása villamos energiává szélturbinák segítségével történik.

1.4.1. A szélenergia hasznosítása

A szélturbinák a szél mozgási energiáját mechanikai energiává, majd generátor segítségével villamos energiává alakítják. A lapátokat a szél megforgatja, ez meghajtja a generátort, ami áramot termel. A turbinák lehetnek:

- **Szárazföldi szélerőművek**: általában mezőgazdasági területeken, dombokon vagy síkságokon telepítik őket.
- **Tengeri szélerőművek**: a tengerbe telepített turbinák, ahol a szél egyenletesebb és erősebb, így nagyobb hatékonyság érhető el.

1.4.2. Előnyök

- **Megújuló és tiszta energiaforrás** – A szélenergia termelése során nincs szén-dioxid-kibocsátás vagy légszennyezés.
- **Alacsony üzemeltetési költségek** – A telepítés után a karbantartási költségek viszonylag alacsonyak.

- **Gyors technológiai fejlődés** – A szélturbinák egyre hatékonyabbak és gazdaságosabbak.

1.4.3. Hátrányok

- **Időjárás- és helyfüggő termelés** – A szél nem fúj mindig, így az áramtermelés ingadozó.
- **Tájképi és zajterhelés** – A turbinák látványa és zaja egyes területeken vitákat vált ki, különösen lakóövezetek közelében.
- **Veszély a madárvilágra** – Bizonyos esetekben a turbinák madarakra és denevérekre veszélyesek lehetnek.

1.5. Vízenergia

A vízenergia a Föld egyik legősibb és legmegbízhatóbb megújuló energiaforrása, amely a víz mozgási energiáját alakítja át villamos energiává vagy mechanikai munkává. Az energiatermelés alapja a víz körforgása, amelyet a Nap hajt: a víz elpárolog, felhőkké alakul, majd csapadék formájában visszakerül a felszínre, ahol folyókba, tavakba és tengerekbe áramlik.

A vízenergia előnyei közé tartozik a megbízhatóság, a hosszú élettartamú erőművek és a szén-dioxid-mentes üzemeltetés. Hátrányai között említhető az ökoszisztémákra gyakorolt hatás, a folyók és tavak vízszintváltozása, valamint az építés magas költsége.

1.5.1. A vízenergia forrásai és típusai

A vízenergia többféle módon hasznosítható, attól függően, hogy milyen víztömegek mozgását használjuk ki:

- **Folyóvízi erőművek:** A folyók természetes áramlását kihasználva termelnek villamos energiát. Ezek lehetnek kisebb méretűek (például kis vízerőművek), vagy nagyobb duzzasztógátakkal kombinált rendszerek.
- **Tározós vízerőművek:** Egy mesterséges tározó segítségével szabályozható az energiatermelés, így az igényeknek megfelelően növelhető vagy csökkenthető a termelés.
- **Szivattyús energiatározók:** Ezek speciális rendszerek, amelyek a felesleges energiát felhasználva vizet szivattyúznak egy magasabb tározóba, majd amikor szükség van rá, a vizet visszaengedik, és energiát termelnek vele.

- **Árapály- és hullámenergia:** A tengerek és óceánok vízmozgását hasznosítják. Az árapályerőművek a dagály és az apály közötti szintkülönbséget, míg a hullámenergia-rendszerek a tenger hullámainak mozgási energiáját alakítják át villamos energiává.

1.5.2. A vízenergia fenntarthatósága és hatásai

A vízenergia környezetbarát, de vannak negatív hatásai:

- **Ökoszisztémák változása** – A halak vándorlási útvonalai megszakadhatnak.
- **Üledéklerakódás** – A tározók eliszaposodása csökkentheti az erőművek hatékonyságát.
- **Társadalmi hatások** – Az egyes vízerőművek építése települések kitelepítését is eredményezheti.

A fenntartható vízenergia megoldásai:

- **Halátjárók építése** – A halak vándorlásának biztosítására.
- **Üledékkezelési stratégiák** – A tározók élettartamának növelésére.
- **Kis vízerőművek** – fejlesztése, amelyek kevésbé avatkoznak be a környezetbe.

2. fejezet

Felhasznált képletek

A fejezet azon képleteket tartalmazza, amelyek a feladatok megoldásához szükségesek.

2.1. A bioenergia fizikai alapjai

*Az égés során felszabaduló energia*¹

$$E = m \cdot Q, \text{ ahol} \quad (2.1)$$

m az elégetett bioenergia tömege (kg), Q pedig a bioenergia fűtőértéke $\left(\frac{MJ}{kg}\right)$.

*A bioenergia elektromos energiaátalakítási hatásfoka*¹

$$E_{\text{hasznosított}} = E_{\text{összes}} \cdot \eta \quad (2.2)$$

A bioenergia tüzelésével hőt termelhetünk, amelyet villamos energiává alakíthatunk erőművekben.

2.2. A geotermikus energia fizikai alapjai

*A geotermikus erőművek energiatermelésének alapja*² a következő képlet:

$$P = \eta \cdot m \cdot c_p \cdot \Delta T, \text{ ahol} \quad (2.3)$$

P a termelt teljesítmény (W), η a rendszer hatásfoka, m a kitermelt víz tömege (kg), c_p a víz fajhője $\left(\frac{J}{K}\right)$, ΔT a víz hőmérséklet-változása.

¹ [7]

² [15]

„A hőszivattyúban lezajló körfolyamatot a teljesítmény-tényezővel (Coefficient of Performance) jellemzik. A *COP* kifejezi, hogy a hasznos energia hányszorosa a befektetett, azaz a kompresszorban felhasznált energiának.”²

$$COP = \frac{Q_{out}}{W_{in}}, \text{ ahol} \quad (2.4)$$

Q a hasznos hőenergia, W a felhasznált energia.

2.3. A geotermikus energia gazdaságossága

A geotermikus energia gazdaságosságát a *megtérülési idő*vel (T) jellemezhetjük:

$$T = \frac{\text{beruházás költsége}}{E_{\text{éves}} \cdot \text{áram ára}}, \text{ ahol} \quad (2.5)$$

$E_{\text{éves}}$ az éves energiahozam (kWh).

2.4. A napelemek teljesítménye

A napelemek a fotovoltaiikus hatás révén alakítják át a napsugárzást elektromos energiává. A *napelem által termelt teljesítmény*³ kiszámítása az alábbi képlettel történhet:

$$P = \eta \cdot I \cdot A, \text{ ahol} \quad (2.6)$$

P a napelem által termelt elektromos teljesítmény (W), η a napelem hatásfoka (jellemzően 15–22 % közötti), I a felszínre érkező napsugárzás intenzitása ($\frac{W}{m^2}$), A pedig a napelem felülete (m^2).

2.5. A napelem által termelt energia időfüggése

Ha a teljesítmény nem állandó, akkor a felhasznált energia az időfüggő teljesítmény integráljaként számítható:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt, \text{ ahol}$$

E a felhasznált energia (J), $P(t)$ az időfüggő teljesítmény (W), és t_1 , t_2 az időintervallum kezdete és vége (s).⁴

³ [16]

⁴ [5]

Mivel ez az összefüggés nem minden középiskolai tananyag része, a feladatok megoldása során egy egyszerűsített, állandó teljesítményre vonatkozó alakot használtam, mely megtalálható a függelékben. Lásd a (7.1) képletet a 48. oldalon.

2.6. A napenergia gazdaságossága

A napelemek gazdaságosságát a *megtérülési idő*vel (T) jellemezhetjük:

$$T = \frac{\text{beruházás költsége}}{E_{\text{éves}} \cdot \text{áram ára}}, \text{ ahol} \quad (2.7)$$

$E_{\text{éves}}$ az éves energiahozam (kWh).

2.7. A szélenergia fizikai alapjai

A szél mozgási energiája⁵ (7.3) a következő képlettel adható meg:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2, \text{ ahol}$$

E a szél mozgási energiája (J), m a levegő tömege (kg), és v a szélssebesség $\left(\frac{m}{s}\right)$.

Mivel a szélturbina egy adott idő alatt a rajta áthaladó levegő mozgási energiáját alakítja át, a *szélenergia teljesítményét*⁶ az alábbi módon fejezhetjük ki:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3, \text{ ahol} \quad (2.8)$$

P a szélben rejlő teljesítmény (W), ρ a levegő sűrűsége (kb. $1,225 \frac{kg}{m^3}$ tengerszinten és $15^\circ C$ -on), és v a szélssebesség $\left(\frac{m}{s}\right)$.

A fenti képlet azt mutatja, hogy a szélssebesség növekedése a termelhető energia jelentős növekedését eredményezi, mivel a teljesítmény a sebesség harmadik hatványával arányos. Ezért a szélerőműveket olyan helyekre telepítik, ahol a szélssebesség rendszeresen magas.

A *lefedett terület* (A) egyenlete:

$$A = \pi \cdot r^2, \text{ ahol} \quad (2.9)$$

r a rotor sugara. Ez azt jelenti, hogy a nagyobb lapátátmérőjű turbinák több energiát képesek kinyerni a szélből.

⁵ [7]

⁶ [8]

2.8. A Betz-határ és a turbinák hatásfoka

A szélturbinák nem képesek a teljes mozgási energiát elektromos energiává alakítani, mivel a szélnek tovább kell haladnia a rotoron keresztül. A Betz-határ kimondja, hogy egy ideális szélturbina a szél energiájának maximum 59,3%-át képes kinyerni.⁷

A *ténylegesen kinyert teljesítmény*⁸ a következőképpen számítható:

$$P_{turbina} = C_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3, \text{ ahol} \quad (2.10)$$

C_p a teljesítmény-együttható.

2.9. A szélenergia-termelés időfüggése

A 2.5. alfejezetben ismertetett általános összefüggés itt is érvényes.

Ha a teljesítmény nem állandó, akkor a felhasznált energia az időfüggő teljesítmény integráljaként számítható:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt, \text{ ahol}$$

E a felhasznált energia (J), $P(t)$ az időfüggő teljesítmény (W), és t_1, t_2 az időintervallum kezdete és vége (s).⁹

2.10. Szélesebesség eloszlás modell

A szélesebességet, mint valószínűségi változót gyakran Weibull eloszlással közelítjük.

*Weibull-eloszlás*¹⁰

Az x valószínűségi változó valószínűség-sűrűségfüggvénye:

$$f(x; \lambda, k) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right), & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

⁷ [20]

⁸ [20]

⁹ [5]

Mivel ez az összefüggés nem minden középiskolai tananyag része, a feladatok megoldása során egy egyszerűsített, állandó teljesítményre vonatkozó alakot használtam, mely megtalálható a függelékben. Lásd a (7.1) képletet a 48. oldalon.

¹⁰ [17, 20, 29]

A Weibull-eloszlás egy folytonos valószínűség-eloszlás, amelyet két vagy három paraméterrel írhatunk le:

1. Alakparaméter (k): Ez a paraméter határozza meg az eloszlás alakját.
 - Ha $k = 1$, akkor az eloszlás exponenciális.
 - Ha $k < 1$, akkor az eloszlás csökkenő meghibásodási rátát jelez.
 - Ha $k > 1$, akkor az eloszlás növekvő meghibásodási rátát jelez.
2. Skálaparaméter (λ): Ez a paraméter az eloszlás nyújtását vagy zsugorodását határozza meg. Az eloszlás középpontját szabályozza, és befolyásolja a szélességét.
3. Helyparaméter (γ) (opcionális): Ez a paraméter eltolja az eloszlást a tengely mentén.

Ha $\gamma = 0$, akkor a helyparamétert gyakran elhagyják, és kétparaméteres Weibull-eloszlásról beszélünk.

2.11. A szélenergia gazdaságossága

A szélenergia-rendszerek költséghatékonyságát a *megtérülési idő*vel (T) lehet jellemezni:

$$T = \frac{\text{beruházás költsége}}{E_{\text{éves}} \cdot \text{áram ára}}, \text{ ahol} \quad (2.12)$$

$E_{\text{éves}}$ az éves energiahozam (kWh).

2.12. A vízenergia matematikai számítása

A víz energiáját két fő formában használjuk fel:

- **Potenciális energia** (7.2) – amikor a víz egy adott magasságból lezúdul.
- **Kinetikus energia** (7.3) – amikor a víz folyás közben mozgatja a turbinát.

A víz *helyzeti energiája*¹¹ (potenciális energia) az alábbi képlettel számítható:

$$E_p = m \cdot g \cdot h, \text{ ahol}$$

m a víz tömege, g a gravitációs gyorsulás $\left(9,81 \frac{m}{s^2}\right)$, és h a víz esési magassága.

¹¹ [7]

A víz tömege és térfogata közötti összefüggés:¹¹

$$m = \rho \cdot V \quad (2.13)$$

Így az alábbi képletet kapjuk:

$$E_p = \rho \cdot V \cdot g \cdot h \quad (2.14)$$

A vízáramlás teljesítménye¹² az alábbi módon határozható meg:

$$P = \eta \cdot \rho \cdot g \cdot Q \cdot h, \text{ ahol} \quad (2.15)$$

P a termelt teljesítmény (W), η a rendszer hatásfoka (általában 80-90% között), ρ a víz sűrűsége $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$, g a gravitációs gyorsulás, Q a vízhozam $\left(\frac{m^3}{s}\right)$, és h a víz esési magassága.

A képletből látható, hogy minél nagyobb a víz mennyisége (Q) és az esési magassága (h), annál több energiát tudunk kinyerni a rendszerből.

A **tengerekből kinyerhető energiát** a nemzetközi szakirodalom általában külön tárgyalja a szárazföldi vízen energiától. Mivel azonban hazánkban nincs tenger, néhány képlet erejéig ebben a fejezetben utalunk erre az energiafajtára.

Az óceáni hőenergia átalakítás (OTEC)

*Carnot-hatékonyság*¹³

$$\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h}, \text{ ahol} \quad (2.16)$$

T_c a hideg réteg hőmérséklete (K), T_h a meleg réteg hőmérséklete (K).

2.13. Árapály- és hullámenergia matematikája

Az árapály- és hullámenergia a tengerek mozgásából nyeri az energiát.

Az árapály-energia teljesítménye:¹⁴

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot g \cdot h^2, \text{ ahol} \quad (2.17)$$

ρ a víz sűrűsége, A az árapály-erőmű területe (m^2), g a gravitációs gyorsulás, és h az árapályszint különbsége (m).

¹² [2, 20]

¹³ [2]

¹⁴ [2]

A hullámenergia¹⁵ egy adott vízszakaszon:

$$P = \frac{1}{16} \cdot \rho \cdot g \cdot h_s^2 \cdot t, \text{ ahol} \quad (2.18)$$

ρ a víz sűrűsége, g a gravitációs gyorsulás, és h_s a hullámmagasság (m), t pedig a hullám periódusideje (s).

¹⁵ [28]

3. fejezet

Feladatok

3.1. Bioenergia

1. A következő táblázat¹ segítségével válaszoljon az alábbi kérdésekre!

Tüzelőanyag	Fűtőérték $\left(\frac{MJ}{kg}\right)$
Akác	14,9
Bükk	15,6
Erdei fenyő	14,1
Éger	15,5
Fűz	14,1
Gyertyán	15,8
Juhar	14,5
Kőris	16,9
Lucfenyő	13,8
Napraforgóhéj brikett	19-21
Nyár	13,4
Nyír	14,2
Tölgy	15,1
Vörös fenyő	14,2

Kérdések:

- a) Melyik fatípusnak a legkisebb, illetve a legnagyobb a fűtőértéke!
- b) Számolja ki a táblázatban szereplő fatípusok fűtőértékének átlagát, medi-

¹ [26]

ánját!

- c) Hány százalékkal magasabb a legnagyobb fűtőértékkel rendelkező tüzelőanyag a legalacsonyabbnál?
2. Egy kg fa elégetése során $15 MJ$ hő szabadul fel. Ha egy háztartás $1000 kg$ fát éget el egy szezonban, mennyi energia szabadul fel összesen?
 3. Egy biogázüzem napi $5000 m^3$ metángázt termel, amelynek fűtőértéke $36 \frac{MJ}{m^3}$. Mennyi az ebből nyerhető napi energia?
 4. Egy biomassza erőmű óránként $100 t$ fát éget el, amelynek fűtőértéke $14 \frac{MJ}{kg}$. Ha a hatásfok 35% , mennyi a tényleges kimenő teljesítmény?
 5. „A biomassza szénhidrogén kötése magas hőmérsékleten megbomlanak, hő hatására a szerves anyagból oxigénszegény környezetben hidrogén, szén-monoxid és metán keletkezik.”²
Írja fel a metán vízgőzzel való érintkezésének reakcióegyenletét! (Hidrogén és szén-dioxid fog képződni.)
 6. Számolja ki egy biomassza erőmű energiatermelését, ha a rendelkezésre álló biomassza tömege $1000 tonna$, fűtőértéke $15 \frac{MJ}{kg}$, és a rendszer hatásfoka 25% !
 7. Vizsgálja meg, mekkora biogáz termelésére képes egy adott mezőgazdasági hulladékmennyiség, ha naponta $500 kg$ szerves hulladék áll rendelkezésre, amely $0,3 \frac{m^3}{kg}$ biogázt termelhet!

3.2. Geotermikus energia

8. Ha egy geotermikus kútból $50 \frac{kg}{s}$ víz áramlik ki $80^\circ C$ -on, és ezt $40^\circ C$ -ra hűtik le. Mekkora a kinyert teljesítmény?
9. Egy $50 MW$ teljesítményű geotermikus erőmű évi $400 GWh$ energiát termel. Ha a beruházási költség 100 milliárd Ft , és az áram ára $40 \frac{Ft}{kWh}$. Mekkora a megtérülési idő?
10. Egy geotermikus kút óránként $50 m^3$ $80^\circ C$ -os vizet hoz a felszínre, míg a visszacsajtoláskor $30^\circ C$ -os a víz. A víz fajhője $4,18 \frac{kJ}{kg \cdot K}$. Mekkora a hőteljesítmény?
11. Ha az előző kút egy 15% -os hatásfokú geotermikus erőművet lát el, mekkora a kimenő villamos teljesítmény?

² [23]

12. A következő táblázat³ segítségével válaszoljon az alábbi kérdésekre!

Ország	Az összes elektromos kapacitás (MW)	A geotermikus elektromos kapacitás (MW)
Costa Rica	1 941	163
El Salvador	1 079	151
Etiópia	700	7
Fülöp-szigetek	15 205	1 931
Guatemala	1 941	33
Indonézia	36 227	797
Kenya	1 134	127
Mexikó	43 318	953
Nicaragua	688	77
Pápua Új-Guinea	55	6

Kérdések:

- Számolja ki soronként, hogy mennyi a geotermikus elektromos kapacitás részaránya!
 - Melyik országban a legnagyobb a geotermikus elektromos kapacitás részaránya?
- Egy geotermikus rendszer évente 500 MWh fűtési energiát biztosít. Ha földgázzal termelnék meg ezt az energiát, és a földgáz ára $14 \frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$, mennyi a megtakarítás?
 - Egy város geotermikus fűtőrendszere 20 MW hőteljesítményt igényel. Ha a kút vizének hőmérséklet-különbsége 50°C , mekkora vízmennyiségre van szükség óránként?
 - Számolja ki egy geotermikus erőmű maximális teljesítményét, ha a geotermikus folyadék áramlási sebessége $100 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$, a bemeneti hőmérséklete 180°C , a kimeneti hőmérséklete 70°C , és a generátor hatásfoka 15% !
 - Egy geotermikus hőszivattyú rendszer hatásfokának elemzése során, mérje meg a COP-t (Coefficient of Performance), ha a rendszer 10 kW fűtési energiát biztosít, miközben 2 kW elektromos energiát fogyaszt!

³ [15]

3.3. Napenergia

17. Egy tipikus háztartási napelemrendszer 4 kW csúcsteljesítményre képes. Ha egy napsütéses napon 6 órán keresztül termel energiát, mekkora az összes megtermelt energia?
18. Egy 1 m^2 -es panel $200\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ besugárzást kap egy 5 órás időszakban, és a hatásfoka 15 %. Mekkora a megtermelt energia?
19. Ha egy 2 millió Ft -os napelemes rendszer évente $4\,000\text{ kWh}$ energiát termel, és az áram ára $50\frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$, mekkora a megtérülési idő?
20. Egy napelemtábla $1,5\text{ m}^2$ területű, és az átlagos besugárzás $800\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Ha a panel hatásfoka 18 %, mekkora a kinyert teljesítmény?
21. Egy 2 kW -os napelemes rendszer naponta átlagosan 5 órán keresztül kap megfelelő napsugárzást. Mennyi energiát termel egy nap alatt?
22. Egy napelemre $1\,200\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ napsugárzás érkezik, és a panel tényleges kimenő teljesítménye 240 W . Ha a panel területe $1,6\text{ m}^2$, mekkora a hatásfoka?
23. Egy 5 kW -os napelemrendszer telepítése 2,5 millió Ft -ba kerül. Ha évente $6\,000\text{ kWh}$ -t termel, és az áram ára $50\frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$, hány év alatt térül meg?
24. Egy város $500\,000\text{ m}^2$ tetőfelületet tudna napelemekkel ellátni. Ha az éves besugárzás $1\,300\frac{\text{kWh}}{\text{m}^2}$, és a napelemek hatásfoka 20 %, mekkora az éves termelés?
25. Az Újszilvási Naperőmű éves energiatermelése: 700 MWh . Átlag napi 8 órás üzemidőt (napi 8 óra napsütést) figyelembe véve mekkora a pillanatnyi teljesítménye?
26. Tervezze meg egy háztartás napelemrendszerét, amely képes fedezni egy 4 fős család éves energiaigényét, ami $5\,000\text{ kWh}$! Számolja ki a szükséges napelemek összfelületét és darabszámát a rendelkezésre álló napsugárzás és napelemek hatásfoka alapján! (Tegyük fel, hogy a napi átlagos sugárzás $5\frac{\text{kWh}}{\text{m}^2}$, egy átlagos monokristályos panel hatásfoka 18 %, egy tipikus napelem panel mérete $1,6\text{ m}^2$, névleges teljesítménye pedig 400 W .)
27. Számolja ki egy adott napelem panel hatásfokát, ha a panel felülete $1,5\text{ m}^2$, és napi 7 kWh energiát termel, miközben a napsugárzás $6\frac{\text{kWh}}{\text{m}^2}$ naponta!

3.4. Szélenergia

28. Ha egy szélturbina rotorjának átmérője 40 méter, a szélesebbesség $10 \frac{m}{s}$, és a teljesítmény-együttható 0,45. Mekkora az általa termelt energia?
29. Ha egy 2 milliárd Ft -os szélörmű évente 10 millió kWh energiát termel, és az áram ára $50 \frac{Ft}{kWh}$. Mekkora a megtérülési idő?
30. Egy szélturbina rotorjának átmérője $10 m$. A levegő sűrűsége $1,225 \frac{kg}{m^3}$, a szélesebbesség $8 \frac{m}{s}$. Mekkora a levegő teljesítménye?
31. Ha az előző turbina tényleges kimenő teljesítménye $12 kW$, akkor mekkora a hatásfoka?
32. Egy szélörmű névleges teljesítménye $2 MW$. Ha évente 2 200 órán át működik maximális teljesítményen, mekkora az éves energiatermelése?
33. Egy szélturbina átmérője $100 m$, és a minimális telepítési távolság az átmérő 10-szerese. Hány turbina fér el egy $10 km^2$ -es területen? Tegyük fel, hogy a turbinák egy négyzetrács pontjaiban helyezkednek el!
34. Egy szélpark $50 MW$ -os, és évente $140\,000 MWh$ energiát termel. Ha az áram ára $50 \frac{Ft}{kWh}$, és a beruházás 40 milliárd Ft volt, hány év alatt térül meg?
35. Számolja ki egy negyed hektárnyi terület szélenergia potenciálját, ha a szélesebbesség $6 \frac{m}{s}$! Az eredményt kW -ban adja meg!
36. Egy szélturbina maximális elméleti hatásfoka a Betz-határ (59,3 %).⁴ Számolja ki a tényleges hatásfokot, ha a turbina által termelt energia $2 MW$, a szélesebbesség $12 \frac{m}{s}$, és a turbina rotorjának átmérője 100 méter.
37. Tervezze meg egy szélörmű park elrendezését egy $10 km^2$ -es területen, figyelembe véve a turbinák közötti minimális távolságot (például a rotor átmérőjének 7-szerese)! Tegyük fel, hogy a turbinák egy négyzetrács pontjaiban helyezkednek el, és a rotor átmérője legyen $100 m$!
38. Egy gyártó cég azt tapasztalta, hogy az általuk gyártott izzók élettartama Weibull-eloszlású, ahol az alakparaméter (k) 1,5 és a skálaparaméter (λ) 2 000 óra. Számítsa ki annak valószínűségét, hogy egy izzó élettartama kevesebb, mint 1500 óra!

⁴ [20]

3.5. Vízenergia

39. A következő táblázat⁵ a kontinensek vízerőkészleteit mutatja.

Kontinens	Elméleti vízerőkészlet (TWh)	Műszakilag hasznosítható (TWh)	Összes villamos energiatermelés (TWh)	Vízenergia-termelés (TWh)
Európa	4 360	1 430	2 599	453
Észak-Amerika	6 150	3 120	3 202	642
Latin-Amerika	5 670	3 780	370	370
Afrika	10 120	3 140	234	49
Ázsia	20 430	7 530	3 475	564
Óceánia	1 500	390	161	39

Kérdések:

- Számolja ki soronként, hogy mennyi a vízenergia, illetve a műszaki vízerő-készlet hasznosíthatóságának aránya!
- Hány százaléka hasznosítható műszakilag a vízerőkészletnek az amerikai kontinensen?
- Mennyi a Föld elméleti vízerőkészlete?
- Számolja ki az alábbi táblázat⁶ segítségével, hogy mennyi TWh a különbség a műszakilag hasznosítható és a műszaki vízerőkészlet hasznosíthatósága között kontinensenként!

Kontinens	Európa	Észak-Amerika	Latin-Amerika	Afrika	Ázsia	Óceánia
Műszaki vízerőkészlet hasznosíthatósága (%)	32	21	7	2	7	10

⁵ [24]

⁶ [24]

40. Az ikervári vízerőművet 1900-ban adták át, és ekkor 600 kW -os teljesítményű gépek működtek benne. Negyed évszázaddal később új turbinák és generátorok beszerelésével közel 256,67 %-kal növekedett a teljesítmény. 1995-ben újabb korszerűsítések történtek, melyek hatására a teljesítmény újabb 148,06 %-kal emelkedett.
- a) Az újabb korszerűsítéseknek hála hány kW -tal lett több az erőmű teljesítménye az eredetihez képest?
- b) A 95 év elteltével hány százalékkal nőtt a teljesítmény?
41. Számolja ki a tiszalöki vízerőmű összehatásfokát, ha tudjuk, hogy az erőmű teljesítménye 12 500 kW , a víznyelése $300 \frac{m^3}{s}$, és az esésmagasság 5 m !
42. Egy vízerőmű turbinájába $10 \frac{m^3}{s}$ víz áramlik, és a szintkülönbség 20 m . A gravitációs gyorsulás $9,81 \frac{m}{s^2}$. Mekkora a víz teljesítménye?
43. Ha az előző erőmű generátora 85 %-os hatásfokú, mekkora a tényleges kimenő teljesítmény?
44. Egy vízerőmű 5 MW teljesítménnyel működik, és évente 4 000 órán át üzemel. Mennyi az éves energiatermelése?
45. Egy víztározóban 50 millió m^3 víz gyűlt össze, és a szintkülönbség 30 m . Mennyi az összes tárolt energia?
46. Egy 100 MW -os vízerőmű évi 500 GWh -t termel. Az áram ára $40 \frac{Ft}{kWh}$, a beruházási költség 200 milliárd Ft . Hány év alatt térül meg?
47. Számolja ki egy vízerőmű maximális teljesítményét, ha a vízhozam $500 \frac{m^3}{s}$, a víz esési magassága 50 méter, és a generátor hatásfoka 90 %!
48. Számolja ki egy víztározó térfogatát, amely szükséges ahhoz, hogy egy 100 MW teljesítményű vízerőmű 10 órán keresztül folyamatosan működjön! A tározó vízszintjének átlagos esési magassága 40 méter.
49. Számolja ki a hullámenergia teljesítményét, ha a hullámok átlagos magassága 2 méter, és a periódusa 8 másodperc!
50. Határozza meg az árapály potenciális energiáját, ha a víz felszíne 5 000 m^2 , és az árapály magassága 5 méter!
51. Egy OTEC rendszer esetén a felszíni víz hőmérséklete $25^\circ C$, a mélyvíz hőmérséklete $5^\circ C$. Számolja ki a rendszer Carnot-hatékonyságát!

52. Mekkora a hullámenergia teljesítménye, ha a hullámok átlagos magassága 1,5 méter, és a periódusa 12 másodperc?
53. Határozza meg az árapály potenciális energiáját, ha a víz felszíne $10\,000\,m^2$, és az árapály magassága 4 méter!

4. fejezet

Megoldások

4.1. Bioenergia

1. Az alábbi táblázat segít a kérdések megválaszolásában.

Fatípus	Fűtőérték $\left(\frac{MJ}{kg}\right)$
Nyár	13,4
Lucfenyő	13,8
Erdei fenyő	14,1
Fűz	14,1
Vörös fenyő	14,2
Nyír	14,2
Juhar	14,5
Akác	14,9
Tölgy	15,1
Éger	15,5
Bükk	15,6
Gyertyán	15,8
Kőris	16,9

Megoldások:

- a) A legkisebb fűtőértékkel rendelkező: Nyár,
a legnagyobb fűtőértékkel rendelkező: Kőris.
- b) A fatípusok átlagos fűtőértéke: $14,8 \left(\frac{MJ}{kg}\right)$,
a mediánja: Juhar.
- c) 57%-kal.

2. Használja a (2.1) képletet!

$$E = m \cdot Q$$

- $m = 1\,000\text{ kg}$
- $Q = 15\frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$

$$E = 1\,000 \cdot 15 = 15\,000\text{ MJ}$$

15 000 MJ energia szabadul fel.

3. Használja a (2.1) képletet!

$$E = m \cdot Q$$

- $m = 5\,000\text{ m}^3$
- $Q = 36\frac{\text{MJ}}{\text{m}^3}$

$$E = 5\,000 \cdot 36 = 180\,000\text{ MJ}$$

A biogázüzem napi 180 000 MJ energiát termel.

4. Használja a (2.1) és (2.2) képleteket!

$$E = m \cdot Q \text{ és } E_{\text{hasznos}} = E \cdot \eta$$

- $m = 100\text{ t} = 100\,000\text{ kg}$
- $Q = 14\frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$
- $\eta = 35\% = 0,35$

$$E_{\text{hasznos}} = 100\,000 \cdot 14 \cdot 0,35 = 490\,000\text{ MJ}$$

Mivel az erőmű óránként égeti el ezt a mennyiséget, a teljesítményt (P) az energia és az idő hányadosaként kapjuk meg:

$$P = \frac{E_{\text{hasznos}}}{t}$$

- $t = 1\text{ h} = 3\,600\text{ s}$

$$P = \frac{490\,000}{3\,600} = 136,1\text{ MW}$$

A biomassza erőmű tényleges kimenő teljesítménye 136,1 MW.

5. $\text{CH}_4 + 2\text{H}_2\text{O} \rightarrow 4\text{H}_2 + \text{CO}_2$

6. Használja a (2.1) és (2.2) képleteket!

$$E_{\text{hasznos}} = m \cdot Q \cdot \eta$$

- $m = 1\,000\,t = 10^6\,kg$
- $Q = 15\,\frac{MJ}{kg} = 15 \cdot 10^6\,\frac{J}{kg}$
- $\eta = 25\,\% = 0,25$

$$E_{hasznos} = 10^6 \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot 0,25 = 3,75 \cdot 10^{12}\,J = 3,75\,TJ$$

A biomassa erőmű energiatermelése $3,75\,TJ$.

7. Számolja ki a napi és éves biogáz termelést a hulladék mennyiségének és a biogáz hozamának szorzatával!

- Napi szerves hulladék tömege: $m_{napi} = 500\,kg$
- Biogáz hozam: $V_{biogáz} = 0,3\,\frac{m^3}{kg}$
- A napi biogáz termelés kiszámítása:

$$V_{napi} = m_{napi} \cdot V_{biogáz} = 500 \cdot 0,3 = 150\,m^3$$

- Az éves biogáz termelés kiszámítása:

$$V_{éves} = V_{napi} \cdot 365\,nap = 150 \cdot 365 = 54\,750\,m^3$$

A napi biogáz termelés $150\,m^3$, az éves biogáz termelés pedig $54\,750\,m^3$.

4.2. Geotermikus energia

8. Használja a (2.3) képletet!

$$P = m \cdot c_p \cdot \Delta T$$

- $m = 50\,\frac{kg}{s}$
- $c_p = 4,18\,\frac{kJ}{kg \cdot K}$
- $t_1 = 80^\circ C$
- $t_2 = 40^\circ C$

$$P = 50 \cdot 4,18 \cdot 40 = 8\,360\,kW = 8,36\,MW$$

$8,36\,MW$ a kinyert teljesítmény.

9. Használja a (2.5) képletet! Számolja ki először az éves bevételt!

- A beruházási költség: $100\,milliárd\,Ft$

- $E_{\text{éves}} = 400 \text{ GWh} = 400 \cdot 10^6 \text{ kWh}$
- Az áram ára: $40 \frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$

Éves bevétel: $400 \cdot 10^6 \cdot 40 = 16 \cdot 10^9 \text{ Ft}$

Megtérülési idő = $\frac{100 \cdot 10^9}{16 \cdot 10^9} \approx 6,25 \text{ év}$

A megtérülési idő 6,25 év.

10. Használja a (2.3) és (2.13) képleteket!

$$P = m \cdot c_p \cdot \Delta T \text{ és } m = \rho \cdot V$$

- $V = 50 \text{ m}^3$
- $c_p = 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
- $t_1 = 80^\circ\text{C}$
- $t_2 = 30^\circ\text{C}$
- $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$P = \frac{\rho \cdot V}{3600} \cdot c_p \cdot \Delta T$$

$$P = \frac{1000 \cdot 50}{3600} \cdot 4,18 \cdot 50 = 2902,8 \text{ kW} = 2,9 \text{ MW}$$

2,9 MW a kinyert teljesítmény.

11. Használja a (2.3) és (7.4) képletet!

$$P = m \cdot c_p \cdot \Delta T \text{ és } P_{\text{kimenő}} = P \cdot \eta$$

- $P = 2902,8 \text{ kWh}$
- $\eta = 15\% = 0,15$

$$P_{\text{kimenő}} = P \cdot \eta = 2902,8 \cdot 0,15 \approx 435,4 \text{ kW}$$

A geotermikus erőmű kimenő villamos teljesítménye kb. 435 kW.

12. a) A feladat megoldásait a táblázat sorai tartalmazzák.

Ország	Az összes elektromos kapacitás (MW)	A geotermikus elektromos kapacitás (MW)	A geotermikus elektromos kapacitás részaránya (%)
Costa Rica	1 941	163	8,4
El Salvador	1 079	151	14
Etiópia	700	7	1
Fülöp-szigetek	15 205	1 931	12,7
Guatemala	1 941	33	1,7
Indonézia	36 227	797	2,2
Kenya	1 134	127	11,2
Mexikó	43 318	953	2,2
Nicaragua	688	77	11,2
Pápua Új-Guinea	55	6	10,9

- b) A feladat megoldása a táblázat kiemelt sora.

13. A megtakarítás kiszámításához először meg kell határozni, mennyibe kerülne a földgázzal előállított hőenergia, majd ezt összevetni a geotermikus energiával.

- $E_{\text{éves}} = 500 \text{ MWh} = 500\,000 \text{ kWh}$
- Az földgáz ára: $14 \frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$

A földgázzal történő hőtermelés költsége: $500\,000 \cdot 14 = 7 \cdot 10^6 \text{ Ft}$

A geotermikus rendszer évente 7 millió Ft megtakarítást jelent a földgázhoz képest.

14. Használja a (2.3) képletet!

$$P = m \cdot c_p \cdot \Delta T$$

- $P = 20 \text{ MW} = 20\,000 \text{ kW}$
- $c_p = 4,18 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
- $\Delta T = 50 \text{ K}$

$$m = \frac{P}{c_p \cdot \Delta T} = \frac{20\,000}{4,18 \cdot 50} \approx 95,7 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

- Óráként a vízmennyiség: $95,7 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \cdot 3\,600 \text{ s} = 344\,520 \text{ kg}$.

- Mivel a víz sűrűsége kb. $1\,000 \frac{kg}{m^3}$, a térfogatáram: $344,52 \frac{m^3}{óra}$.

A geotermikus rendszer óránként $344,52 m^3$ vizet igényel.

15. Használja a (2.3) és (7.4) képleteket!

$$P_{hő} = m \cdot c_p \cdot (T_{bemeneti} - T_{kimeneti}) \quad \text{és} \quad P_{hasznos} = P_{hő} \cdot \eta$$

- $m = 100 \frac{kg}{s}$
- $T_{bemeneti} = 180^\circ C = 453 K$
- $T_{kimeneti} = 70^\circ C = 343 K$
- $\eta = 15\% = 0,15$
- $c_p = 4\,180 \frac{J}{kg \cdot K}$

$$P_{hasznos} = 100 \cdot 4\,180 \cdot (453 - 343) \cdot 0,15 = 6,897 MW$$

A geotermikus erőmű maximális hasznos teljesítménye $6,9 MW$.

16. Használja a (2.4) képletet!

$$COP = \frac{Q_{out}}{W_{in}}$$

- $Q_{out} = 10 kW$
- $W_{in} = 2 kW$

$$COP = \frac{10 kW}{2 kW} = 5$$

A rendszer COP értéke: 5.

Ez azt jelenti, hogy a rendszer minden $1 kW$ felvett elektromos energiából $5 kW$ fűtési energiát állít elő.

4.3. Napenergia

17. Használja a (7.1) képletet!

$$E = P \cdot t$$

- $P = 4 kW$
- $t = 6 h$

$$E = 4 \cdot 6 = 24 kWh$$

Az összes megtermelt energia $24 kWh$.

18. Használja a (2.6) és (7.1) képleteket!

$$E = (\eta \cdot I \cdot A) \cdot t$$

- $A = 1 \text{ m}^2$
- $I = 200 \frac{W}{m^2}$
- $t = 5 \text{ h}$
- $\eta = 15 \% = 0,15$

$$E = (0,15 \cdot 200 \cdot 1) \cdot 5 = 150 \text{ Wh} = 0,15 \text{ kWh}$$

A megtermelt energia $0,15 \text{ kWh}$.

19. Számolja ki először az éves bevételt! Használja a (2.7) képletét!

- A beruházási költség: 2 millió Ft
- $E_{\text{éves}} = 4000 \text{ kWh}$
- Az áram ára: $50 \frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$

Éves megtakarítás: $4000 \cdot 50 = 200000 \text{ Ft}$

Megtérülési idő = $\frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^5} = 10 \text{ év}$

A napelemes rendszer megtérülési ideje 10 év.

20. Használja a (2.6) képletet!

$$P = A \cdot I \cdot \eta$$

- $A = 1,5 \text{ m}^2$
- $I = 800 \frac{W}{m^2}$
- $\eta = 18 \% = 0,18$

$$P = 1,5 \cdot 800 \cdot 0,18 = 216 \text{ W}$$

216 W a kinyert teljesítmény.

21. Használja a (7.1) képletet!

$$E = P \cdot t$$

- $P = 2 \text{ W}$
- $t = 5 \text{ h}$

$$E = 2000 \cdot 5 = 10000 \text{ Wh} = 10 \text{ kWh}$$

10 kWh energiát termel egy nap alatt.

22. Használja a (2.6) képletet!

$$\eta = \frac{P_{kimenő}}{A \cdot I}$$

- $A = 1,6 \text{ m}^2$
- $I = 1\,200 \frac{W}{m^2}$
- $P_{kimenő} = 240 \text{ W}$

$$\eta = \frac{240}{1,6 \cdot 1\,200} = 0,125 = 12,5 \%$$

12,5 % a panel hatásfoka.

23. Számolja ki először az éves megtakarítást! Használja a (2.7) képletet!

- A telepítés összege: 2,5 *millió Ft*
- $E_{éves} = 6\,000 \text{ kWh}$
- Az áram ára: 50 $\frac{Ft}{kWh}$

Éves megtakarítás: $6\,000 \cdot 50 = 300\,000 \text{ Ft}$

Megtérülési idő = $\frac{2\,500\,000}{300\,000} \approx 8,33 \text{ év}$

8,33 év alatt térül meg.

24. Használja a (2.6) és (7.1) képleteket!

$$E = A \cdot I \cdot \eta$$

- $A = 500\,000 \text{ m}^2$
- $I = 1\,300 \frac{kWh}{m^2}$
- $\eta = 20 \% = 0,2$

$$E = 500\,000 \cdot 1\,300 \cdot 0,2 = 26\,000\,000 \text{ kWh} = 26 \text{ GWh}$$

26 GWh az éves termelés.

25. Az éves energiatermelés és az átlagos napi üzemidő alapján a pillanatnyi teljesítmény a következőképpen számítható:

- Éves energiatermelés: $E_{éves} = 700 \text{ MWh} = 700 \cdot 10^3 \text{ kWh}$
- Napi üzemidő: $t_{napi} = 8 \text{ óra}$
- Éves üzemidő kiszámítása:

$$t_{éves} = 8 \frac{\text{óra}}{\text{nap}} \cdot 365 \text{ nap} = 2\,920 \text{ óra}$$

- Pillanatnyi teljesítmény (P) kiszámítása (7.1):

$$P = \frac{E_{\text{éves}}}{t_{\text{éves}}} = \frac{700 \cdot 10^3 \text{ kWh}}{2920 \text{ h}} = 239,73 \text{ kW}$$

A pillanatnyi teljesítménye tehát körülbelül 240 kW.

26. A háztartás éves energiaigényének fedezésére tervezzünk egy megfelelő méretű napelemrendszert! (2.6) és (7.1)

- Éves energiaigény: 5 000 kWh
- Napi átlagos napsugárzás: $5 \frac{\text{kWh}}{\text{m}^2}$
- Napelemek hatásfoka: 18 %
- Napelem panel mérete: $1,6 \text{ m}^2$
- Napelem panel névleges teljesítménye: $400 \text{ W} = 0,4 \text{ kW}$

A rendszernek napi szinten kell biztosítania:

$$\frac{5000 \text{ kWh}}{365} \approx 13,7 \frac{\text{kWh}}{\text{nap}}$$

A napi energiatermelés képlete: $E = A \cdot I \cdot \eta$

$$A = \frac{E}{I \cdot \eta} = \frac{13,7}{5 \cdot 0,18} \approx 15,2 \text{ m}^2$$

Szükséges panelek számának meghatározása:

$$\frac{15,2}{1,6} \approx 9,5$$

Tehát 10 db napelem panelre van szükség. Egy panel teljesítménye 400 W, így a teljes rendszer névleges teljesítménye:

$$10 \cdot 400 = 4000 \text{ W} = 4 \text{ kW}$$

Egy 4 kW-os napelemrendszerre van szükség, amely 10 db, egyenként 400 W-os napelemből áll. A napelemek összfelülete kb. 16 m^2 .

27. A napelem hatásfokának kiszámításához használja a (2.6) és (7.1) képleteket!

$$\eta = \frac{E}{A \cdot I}$$

- $E = 2,1 \text{ kWh}$
- $A = 1,6 \text{ m}^2$

- $I = 6 \frac{kWh}{m^2}$

$$\eta = \frac{2,1}{1,6 \cdot 6} = \frac{2,1}{9,6} \approx 0,21875$$

A napelem hatásfoka kb. 22 %.

4.4. Szélenergia

28. Használja a (2.10) és a (2.9) képleteket!

$$P_{turbina} = C_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3 \quad \text{és} \quad A = r^2 \cdot \pi$$

- $C_p = 0,45$
- $\rho = 1,225 \frac{kg}{m^3}$
- $d = 40 \text{ m} \rightarrow r = 20 \text{ m}$
- $v = 10 \frac{m}{s}$

$$P_{turbina} = C_p \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot r^2 \cdot \pi \cdot v^3$$

$$P_{turbina} = 0,45 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 20^2 \cdot \pi \cdot 10^3 = 346\,350,375 \text{ W} = 346,35 \text{ kW} = 0,346 \text{ MW}$$

A szélturbina által termelt teljesítmény kb. 0,35 MW.

29. Használja a (2.12) képletet! Számolja ki először az éves bevételt!

- A beruházási költség: 2 milliárd Ft
- $E_{\text{éves}} = 10^7 \text{ kWh}$
- Az áram ára: 50 $\frac{Ft}{kWh}$

$$\text{Éves bevétel: } 10^7 \cdot 50 = 5 \cdot 10^8 \text{ Ft}$$

$$\text{Megtérülési idő} = \frac{2 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^8} = 4 \text{ év}$$

A szél erőmű 4 év alatt térül meg.

30. Használja a (2.8) képletet!

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3$$

- $\rho = 1,225 \frac{kg}{m^3}$
- $v = 8 \frac{m}{s^2}$
- $d = 10 \text{ m} \rightarrow r = 5 \text{ m}$
- $A = r^2 \cdot \pi = 25 \pi \text{ m}^2$

$$P_{levegő} = \frac{1}{2} \cdot 1,225 \cdot 25 \cdot 3,14 \cdot 8^3 = 24\,630,144 \text{ W} = 24,63 \text{ kW}$$

24,63 kW a levegő teljesítménye.

31. Használja a (7.4) képletet!

$$\eta = \frac{P_{kimenő}}{P_{levegő}}$$

- $P_{kimenő} = 12 \text{ kW}$
- $P_{levegő} = 24,63 \text{ kW}$

$$\eta = \frac{12}{24,63} = 0,4872 \approx 48,72 \%$$

48,72% a hatásfoka.

32. Használja a (7.1) képletét!

$$E = P \cdot t$$

- $P = 2 \text{ MW}$
- $t = 2\,200 \text{ h}$

$$E = 2\,000 \cdot 2\,200 = 4\,400\,000 \text{ kWh} = 4\,400 \text{ MWh} = 4,4 \text{ GWh}$$

4,400 GWh az éves energiatermelés.

33. Számolja ki hány darab turbina fér el a területen!

- $A = 10 \text{ km}^2 = 10^7 \text{ m}^2$
- $d = 100 \text{ m}$
- Turbinák közötti távolság: $10 \cdot 100 \text{ m} = 1\,000 \text{ m}$

A turbinákat négyzetrácsos mintában helyezzük el. Így számítva egy turbina helyigénye: $1\,000 \text{ m} \cdot 1\,000 \text{ m} = 1\,000\,000 \text{ m}^2$

$$\text{Turbinák száma} = \frac{\text{Terület}}{\text{Egy turbina helyigénye}} = \frac{10^7}{10^6} \approx 10 \text{ db}$$

10 darab turbina fér el.

34. Használja a (2.12) képletet! Számolja ki először az éves bevételt!

- A telepítés összege: 40 milliárd Ft
- $E_{éves} = 140\,000 \text{ MWh}$
- Az áram ára: $50 \frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$

Éves bevétel: $140\,000\,000 \cdot 50 = Ft = 7\,000 \cdot 10^6 Ft$

Megtérülési idő = $\frac{40 \cdot 10^9}{7 \cdot 10^9} \approx 5,71 \text{ év}$

5,71 év alatt térül meg.

35. Használja a (2.8) képletét!

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot v^3$$

- $\rho \approx 1,225 \frac{kg}{m^3}$
- $A = 2\,500 m^2$
- $v = 6 \frac{m}{s}$

$$P = 0,5 \cdot 1,225 \cdot 2\,500 \cdot 6^3 = 330\,750 W = 330,75 kW$$

A szélenergia potenciálja 330,75 kW.

36. Számolja ki a rendelkezésre álló szélenergiát a képlet segítségével, majd hasonlítsa össze a ténylegesen termelt energiával! (2.8) és (2.9)

$$P = 0,5 \cdot \rho \cdot A \cdot v^3 \text{ és } A = \pi \cdot r^2$$

- $\rho \approx 1,225 \frac{kg}{m^3}$
- $P_{tényleges} = 2 MW = 2 \cdot 10^6 W$
- $d = 100 m \rightarrow r = \frac{d}{2} = 50 m$
- $v = 12 m^3$

A rendelkezésre álló szélenergia teljesítménye:

$$P = 0,5 \cdot 1,225 \cdot \pi \cdot 50^2 \cdot 12^3 = 8\,302\,591,2 W \approx 8,3 MW$$

Tényleges hatásfok kiszámítása:

$$\eta = \frac{P_{tényleges}}{P} = \frac{2 \cdot 10^6}{8\,302\,591,2} \approx 0,241 = 24,1\%$$

A rendelkezésre álló szélenergia teljesítménye 8,3 MW, és a tényleges hatásfok 24,1 %. Ez azt jelenti, hogy a turbina az elméletileg rendelkezésre álló szélenergia kb. 24.1 %-át képes hasznosítani.

37. Számolja ki, hány turbina fér el a területen!

- $A = 10 \text{ km}^2 = 10^7 \text{ m}^2$
- $d = 100 \text{ m}$
- Turbinák közötti távolság: $7 \cdot 100 \text{ m} = 700 \text{ m}$

A turbinákat négyzetrácsos mintában helyezük el. Így számítva egy turbina helyigénye: $700 \text{ m} \cdot 700 \text{ m} = 490\,000 \text{ m}^2$

$$\text{Turbinák száma} = \frac{\text{Terület}}{\text{Egy turbina helyigénye}} = \frac{10^7}{4,9 \cdot 10^5} \approx 20 \text{ db}$$

Tehát 20 turbina férne el a területen, amelyet 5×4 -es rácsos alakzatban helyezünk el. (5 sor és 4 oszlop vagy fordítva.)

38. Használja a (2.11) eloszlásfüggvényét, a (7.5) képletet!

A Weibull-eloszlás eloszlásfüggvénye a következőképpen írható fel:

$$F(x; \lambda, k) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$$

Itt az értékek:

$k=1,5$, $\lambda=2\,000$, $x=1\,500$.

Behelyettesítjük az értékeket az eloszlásfüggvénybe:

$$F(1\,500; 2\,000, 1,5) = 1 - e^{-\left(\frac{1\,500}{2\,000}\right)^{1,5}}$$

$$\frac{1\,500}{2\,000}^{1,5} = (0,75)^{1,5} = 0,6495$$

Most behelyettesítjük ezt az értéket az exponenciális függvénybe:

$$e^{-0,6495} \approx 0,522$$

Ezután kiszámítjuk a valószínűséget:

$$F(1\,500; 2\,000, 1,5) = 1 - 0,522 = 0,478$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy egy izzó élettartama kevesebb, mint 1 500 óra, kb. 0,478, azaz 47,8 %.

4.5. Vízenergia

39. a) A feladat megoldásait a táblázat sorai tartalmazzák.

Kontinens	Vízenergia aránya (%)	Műszaki vízerőkészlet hasznosíthatóságának aránya (%)
Európa	18	32
Észak-Amerika	20	21
Latin-Amerika	76	7
Afrika	21	2
Ázsia	16	7
Óceánia	24	10

- b) 33%-a hasznosítható műszakilag.

- c) A Föld elméleti vízerőkészlete: 48 230 TWh

- d) A feladat megoldásait a táblázat utolsó sora tartalmazza.

Kontinens	Európa	Észak-Amerika	Latin-Amerika	Afrika	Ázsia	Óceánia
Műszakilag hasznosítható (TWh)	1 430	3 120	3 780	3 140	7 530	390
Műszaki vízerőkészlet hasznosíthatósága (TWh)	1 395,2	1 291,5	396,9	202,4	1 430,1	150
Különbség (TWh)	34,8	1 828,5	3 383,1	2 937,6	6 099,9	240

40. a) A feladat részmegoldásai a táblázatban láthatók.

Évszám	Teljesítmény (kW)	Különbségek az 1900-as évhez képest (kW)
1900	600	0
1925	1 540	940
1995	2 280	1 680

1995-ben az 1925-ös adatokhoz képest 740 kW -tal nőtt a teljesítmény.

b) 380 %-kal nőtt a teljesítmény.

41. A Tiszaöki Vízerőmű összehatásfoka körülbelül 84,95 %.

42. Használja a (2.15) képletet!

$$P = \rho \cdot g \cdot Q \cdot h$$

- $\rho = 1\,000 \frac{kg}{m^3}$
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$
- $Q = 10 \frac{m^3}{s}$
- $h = 20 \text{ m}$

$$P = 1\,000 \cdot 9,81 \cdot 10 \cdot 20 = 1\,962\,000 \text{ W} = 1\,962 \text{ kW} = 1,962 \text{ MW}$$

1,962 MW a víz teljesítménye.

43. Használja a (2.15) képletet!

$$P = \eta \cdot \rho \cdot g \cdot Q \cdot h$$

- $\eta = 85 \% = 0,85$
- $\rho = 1\,000 \frac{kg}{m^3}$
- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$
- $Q = 10 \frac{m^3}{s}$
- $h = 20 \text{ m}$

$$P = 0,85 \cdot 1\,000 \cdot 9,81 \cdot 10 \cdot 20 = 1\,667\,700 \text{ W} = 1,6677 \text{ MW}$$

1,6677 MW a tényleges kimenő teljesítmény.

44. Használja a (7.1) képletet!

$$E = P \cdot t$$

- $P = 5 \text{ MW}$
- $t = 4\,000 \text{ h}$

$$E = 5 \cdot 4\,000 = 20\,000 \text{ MWh}$$

20 000 MWh az éves energiatermelés.

45. Használja a (2.14) képletet!

$$E = \rho \cdot g \cdot V \cdot h$$

- $\rho = 1\,000 \frac{kg}{m^3}$

- $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$
- $V = 50\,000\,000 \text{ m}^3$
- $h = 30 \text{ m}$

$$E = 1\,000 \cdot 9,81 \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot 30 = 14,715 \cdot 10^{12} \text{ J} = 14,715 \text{ TJ}$$

14,715 TJ az összes tárolt energia.

46. Használja a (2.12)! Számolja ki először az éves bevételt!

- A beruházási költség: 200 *milliárd Ft*
- $E_{\text{éves}} = 500 \text{ GWh}$
- Az áram ára: $40 \frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$

Éves bevétel: $500\,000\,000 \cdot 40 \text{ Ft} = 20 \cdot 10^9 \text{ Ft}$

Megtérülési idő = $\frac{200 \cdot 10^9}{20 \cdot 10^9} = 10 \text{ év}$

10 év alatt térül meg.

47. Használja a (2.15) képletet!

$$P = \eta \cdot \rho \cdot g \cdot Q \cdot h$$

- $\eta = 90\% = 0,9$
- $\rho = 1\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $Q = 500 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$
- $h = 50 \text{ m}$

$$P = 0,9 \cdot 1\,000 \cdot 9,81 \cdot 500 \cdot 50 = 220\,725\,000 \text{ W} = 220,73 \text{ MW}$$

A vízerőmű maximális teljesítménye 220,73 MW.

48. Először számolja ki az összes szükséges energiát (7.1), majd a tározó térfogatát a rendelkezésre álló vízenergia képlet (2.14) alapján!

Az erőmű teljesítménye és az üzemidő alapján:

$$E = P \cdot t$$

- $P = 100 \text{ MW} = 10^8 \text{ W}$
- $t = 10 \text{ óra} = 36\,000 \text{ s}$

$$E = 10^8 \cdot 36\,000 = 3,6 \cdot 10^{12} \text{ J}$$

A víz energiáját a helyzeti energia képlete adja meg:

$$E = \eta \cdot \rho \cdot g \cdot V \cdot h$$

- $\eta = 90\% = 0,9$
- $\rho = 1\,000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $h = 40 \text{ m}$

$$V = \frac{E}{\eta \cdot \rho \cdot g \cdot h} = \frac{3,6 \cdot 10^{12}}{0,9 \cdot 1\,000 \cdot 9,81 \cdot 40} \approx 10,22 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

A víztározó szükséges térfogata $10\,220\,000 \text{ m}^3$.

49. Használja a (2.18) képletet!

$$P = \frac{1}{16} \cdot \rho \cdot g \cdot h_s^2 \cdot t$$

- $\rho = 1\,025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $h_s = 2 \text{ m}$
- $t = 8 \text{ s}$

$$P = \frac{1}{16} \cdot 1\,025 \cdot 9,81 \cdot 2^2 \cdot 8 = 20\,145,6 \text{ W} = 20,15 \text{ kW}$$

A hullámenergia teljesítménye $20,15 \text{ kW}$.

50. Használja a (2.17) képletet!

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot A \cdot h^2$$

- $\rho = 1\,025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $A = 5\,000 \text{ m}^2$
- $h = 5 \text{ m}$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot 1\,025 \cdot 9,81 \cdot 5\,000 \cdot 5^2 = 628\,706\,250 \text{ J} \approx 628,7 \text{ MJ}$$

Az árapály potenciális energiája $628,7 \text{ MJ}$.

51. Használja a (2.16) egyenletet!

$$\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

- $T_c = 5^\circ\text{C} = 278,15 \text{ K}$
- $T_h = 25^\circ\text{C} = 298,15 \text{ K}$

$$\eta = 1 - \frac{278,15}{298,15} \approx 0,067 = 6,7\%$$

6,7% a rendszer Carnot-hatékonysága.

52. Használja a (2.18) képletet!

$$P = \frac{1}{16} \cdot \rho \cdot g \cdot h_s^2 \cdot t$$

- $\rho = 1\,025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $h_s = 1,5 \text{ m}$
- $t = 12 \text{ s}$

$$P = \frac{1}{16} \cdot 1\,025 \cdot 9,81 \cdot 1,5^2 \cdot 12 = 16\,992,19 \text{ W} \approx 17 \text{ kW}$$

A hullámenergia teljesítménye kb. 17 kW.

53. Használja a (2.17) képletet!

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot A \cdot h^2$$

- $\rho = 1\,025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $A = 10\,000 \text{ m}^2$
- $h = 4 \text{ m}$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot 1\,025 \cdot 9,81 \cdot 10\,000 \cdot 4^2 = 803\,040\,000 \text{ J} = 803,04 \text{ MJ}$$

Az árapály potenciális teljesítménye 803,04 MJ.

5. fejezet

Következtetések

A megújuló energiaforrások alkalmazása nem csupán környezetvédelmi szempontból kiemelkedően fontos, hanem gazdasági és társadalmi hatásaik miatt is. A szakdolgozat célja az volt, hogy a matematikai modellezés és számítások segítségével bemutassa ezeknek az energiaforrásoknak a működését, hatékonyságát és a felhasználásukkal kapcsolatos kihívásokat. A példatár által a matematikai ismeretek gyakorlati alkalmazását lehetővé tesszük egy olyan témakörben, amely egyre nagyobb jelentőséggel bír a fenntartható fejlődés szempontjából.

A dolgozat során bemutatott matematikai összefüggések azt mutatják, hogy a megújuló energiaforrások kiaknázása sokszor összetett számításokat igényel, amelyek több tudományterület együttműködését feltételezik. Az energiahozam becslésétől kezdve a hatékonysági számításokon át a gazdaságossági elemzésekig számos matematikai eszköz áll rendelkezésre a megfelelő döntések meghozatalához. A példatár hozzájárul ahhoz, hogy a megújuló energiaforrásokkal kapcsolatos matematikai problémák gyakorlati oldalát is megismerhessék a tanárok és diákok.

A feladatok életkori megkötés nélküli kidolgozása lehetővé teszi, hogy a példatárat a középiskolai és akár a felsőoktatási oktatásban is felhasználják. A feladatok szerkesztése során törekedtünk arra, hogy a különböző megújuló energiaforrásokhoz kapcsolódó példák a tanulók számára érthetőek és relevánsak legyenek, miközben matematikai kompetenciájukat is fejlesztik.

A példatár tehát nemcsak a matematikai gondolkodás erősítését segíti, hanem hozzájárulhat a fenntartható fejlődéssel kapcsolatos szemléletformáláshoz is. Remélhetőleg a dolgozat anyaga ösztönzőleg hat a további oktatási anyagok kidolgozására, és támogatja a tanárokat abban, hogy a matematikát életszerű és aktuális problémákon keresztül ismertessék meg a diákokkal.

6. fejezet

Összefoglalás

A szakdolgozat célja a megújuló energiaforrások matematikai modellezésének és alkalmazásának bemutatása egy példatár segítségével. A dolgozatban részletesen ismertetésre kerültek a főbb megújuló energiaforrások – napenergia, szélenergia, vízenergia, bioenergia és geotermikus energia –, valamint azok matematikai háttere és számítási módszerei. A példatár olyan matematikai feladatokat tartalmaz, amelyek segítségével a diákok és tanárok egyaránt gyakorolhatják a tantárgy különböző témaköreit, miközben megismerkednek a fenntartható fejlődés szempontjából fontos energiaforrásokkal.

A dolgozat egyik fő eredménye, hogy a megújuló energiaforrásokkal kapcsolatos feladatokat kétféle módon rendszerezi: egyrészt az energiaforrások szerint, másrészt a matematikai eszközök alapján, lehetővé téve az oktatásban való sokoldalú felhasználást. A példatár különböző nehézségi szinteket tartalmaz, így alkalmazható középiskolai és felsőoktatási környezetben is. A részletes megoldások révén a tanárok és diákok egyaránt könnyebben követhetik az egyes feladatok logikai menetét.

A példatár nemcsak a matematikai készségek fejlesztését szolgálja, hanem hozzájárulhat a fenntarthatósági szemlélet formálásához is. A dolgozat eredményei azt mutatják, hogy a megújuló energiaforrásokkal kapcsolatos problémák hatékonyan integrálhatók a matematika oktatásába, ezáltal a diákok nemcsak a számítási módszereket sajátíthatják el, hanem jobban megérthetik a környezetvédelmi és energetikai összefüggéseket is.

Összességében a dolgozat és a példatár hozzájárulhat ahhoz, hogy a matematika oktatása életszerűbbé váljon, és a diákok gyakorlati szempontból is hasznosítható tudást szerezzenek.

7. fejezet

Függelék: Matematikai jelölések és fogalmak

Ez a függelék biztosítja az összes olyan alapvető jelölést és fogalmat, amelyeket a példatár feladatai során használunk.¹ A részletes magyarázatok nélkülözhetetlenek lehetnek azok számára, akik gyorsan szeretnék áttekinteni a szükséges matematikai eszköztárat a megújuló energiaforrások matematikai elemzéséhez.

7.1. Prefixumok

Előtag jele	Előtag neve	Decimális szorzó
k	kilo-	10^3
M	mega-	10^6
G	giga-	10^9
T	tera-	10^{12}
P	peta-	10^{15}
E	exa-	10^{18}

7.2. Állandók

megnevezés	jelölés	érték	mértékegység
gravitációs gyorsulás	g	$\approx 9,81$	$\frac{m}{s^2}$
levegő sűrűsége	ρ	$\approx 1,225$	$\frac{kg}{m^3}$
víz sűrűsége	ρ	$\approx 1\,000$	$\frac{kg}{m^3}$
tengervíz sűrűsége	ρ	$\approx 1\,025$	$\frac{kg}{m^3}$
víz fajhője	c_p	$\approx 4,18$	$\frac{kJ}{kg \cdot K}$

¹ [7]

7.3. Képletek

Munka

$$W = F \cdot s, \quad [W] = Nm = J \text{ (joule)}^2$$

Teljesítmény

$$P = \frac{W}{t}, \quad [P] = \frac{J}{s} = W \text{ (watt)}^2$$

Energia: egy test (vagy egy berendezés, pl. egy erőmű) munkavégző-képességét energiának nevezzük. Az energia értelmezése és mértékegysége tehát megegyezik a munkáéval. Így felírható a következő (állandó teljesítmény mellett):

$$E = P \cdot t, \text{ ahol} \tag{7.1}$$

E a termelt energia, P a pillanatnyi teljesítmény, t pedig az idő.

Az alábbi energiafajtákat ismerjük:

helyzeti energia

$$E_h = m \cdot g \cdot h, \text{ ahol} \tag{7.2}$$

m a test tömege, g a gravitációs gyorsulás, és h pedig a magasság.

mozgási energia

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2, \text{ ahol} \tag{7.3}$$

m a test tömege, és v a sebesség.

Hatásfok: egy rendszer vagy eszköz hatékonyságát méri, vagyis azt mutatja meg, hogy a bevitt energiából mennyi alakul át hasznos energiává.

$$\eta = \frac{\text{hasznosított teljesítmény}}{\text{összes teljesítmény}} \cdot 100\% \tag{7.4}$$

A **Weibull-eloszlás**³ (2.11) kumulatív eloszlásfüggvénye:

$$F(x; \lambda, k) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \tag{7.5}$$

² A joule és a watt többszöröseit prefixumokkal fejezzük ki.

³ [17, 29]

7.3.1. A tiszta víz és a tengervíz sűrűsége

- A *tiszta víz*nek 4°C-on a legnagyobb a sűrűsége ($\approx 1\,000 \frac{kg}{m^3}$).
- A *tengervíz* sűrűsége függ:
 - a sókoncentrációtól (A magasabb sótartalom nagyobb sűrűséget eredményez.)
 - a hőmérséklettől (A melegebb víz kisebb, míg a hidegebb víz nagyobb sűrűségű.)
 - a nyomástól (A mélyebb vízrétegekben a nagyobb nyomás miatt a sűrűség enyhén növekedhet.)

Közepes sótartalommal, mérsékelt hőmérséklettel és normál légköri nyomás alatt a tengervíz sűrűsége körülbelül $1\,025 \frac{kg}{m^3}$.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném kifejezni őszinte hálámat és köszönetemet mindazoknak, akik támogatásukkal és szakmai útmutatásukkal hozzájárultak szakdolgozatom elkészítéséhez.

Elsősorban köszönöm Prof. Dr. Mika Jánosnak és Oláhné Dr. Téglási Ilonának, konzulenseimnek, akik értékes tanácsaikkal, szakmai iránymutatásukkal és folyamatos támogatásukkal segítették munkámat. Útmutatásuk és konstruktív visszajelzéseik nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

Külön köszönöm Tómacs Tibornak, akinek LaTeX kézikönyve, jegyzetei és videó útmutatói nagy segítséget nyújtottak a dolgozat szakszerű formázásában és szerkesztésében. Az általa biztosított anyagok jelentősen hozzájárultak ahhoz, hogy a dolgozat technikai, stilisztikai és tipográfiai szempontból is megfelelő színvonalon valósulhasson meg.

Végül, szeretném megköszönni a családomnak és barátaimnak a türelmüket, bátorításukat és támogatásukat, amelyeket a szakdolgozat írásának teljes folyamata során nyújtottak. Az ő jelenlétük és biztatásuk nélkül ez a munka sokkal tovább tartott volna.

Irodalomjegyzék

- [1] BÁRDOSSY, A.: *Vízerőművek tervezése és üzemeltetése*, Műegyetemi Kiadó, 2002.
- [2] BARTHOLY JUDIT, BREUER HAJNALKA, PIECZKA ILDIKÓ, PONGRÁCZ RITA, RADICS KORNÉLIA: *Megújuló energiaforrások*, Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Budapest, 2013.
- [3] BÉKÉSI GYÖRGY: *Szélergia: Az energia jövője*, Springer Hungarica Kiadó, Budapest, 2009.
- [4] BÜKI GERGELY: *Erőművek*, Műegyetemi kiadó, Budapest, 2004.
- [5] EROSTYÁK JÁNOS, LITZ JÓZSEF: *A fizika alapjai*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
- [6] GÖÖZ LAJOS: *A természeti erőforrásokról*, Nyíregyházi Főiskola, Nyíregyháza, 1999.
- [7] DR. HALÁSZ TIBOR: *Fizika 9*, Mozaik Kiadó, Szeged, 2009.
- [8] HALLENGA, UWE: *A szélergia hasznosítása*, Cser Könyvkiadó És Ker. Kft, 2009.
- [9] HEGEDÚSNÉ BARANYAI NÓRA (SZERK.): *Megújuló energiaforrások*, Mezőgazda Kiadó, 2008.
- [10] KADERJÁK PÉTER: *Megújuló energiaforrások és az energiagazdálkodás jövője*, Corvina Kiadó, Budapest, 2012.
- [11] KISS ÁDÁM, TASNÁDI PÉTER: *Környezetfizika*, Typotex, Budapest, 2012.
- [12] LACZÓ DÁNIEL: *A megújuló energiaforrások kézikönyve*, Környezettudományi Központ, Budapest, 2012.
- [13] LÁNG ISTVÁN (SZERK.): *Megújuló energiaforrások*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2008.
- [14] LEDÁCS KISS ALADÁR: *A szélergia hasznosításának lehetőségei Magyarországon*, Energiagazdálkodási Tudományos Egyesület, 1980-82.

- [15] MÁDLNÉ SZŐNYI JUDIT: *A geotermikus energia*, Grafon, Nagykovácsi, 2006.
- [16] MOLNÁR LÁSZLÓ: *A napenergia hasznosítása*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2007.
- [17] OBÁDOVICS J. GYULA: *Valószínűesszámitás és matematikai statisztika*, Scolar Kiadó, Budapest, 2009.
- [18] PATAY ISTVÁN: *A szélenergia hasznosítása*, Szaktudás Kiadó Ház, Budapest, 2003.
- [19] SÁGI NORBERT: *Megújuló energiák*, Typotex Kiadó, Budapest, 2010.
- [20] SZLIVKA FERENC, MOLNÁR ILDIKÓ: *Víz- és szélenergia hasznosítás*, Edutus Főiskola Kiadó, Tatabánya, 2012.
- [21] TAKÁCS JÁNOS: *Geotermikus energia*, Műszaki Könyvkiadó, 2010.
- [22] TÓTH LÁSZLÓ, HORVÁTH GÁBOR: *Alternatív energia - Szélmotorok, szélgenerátorok*, Szaktudás Kiadó Ház, Budapest, 2003.
- [23] UJFALUDI LÁSZLÓ: *Napenergia, a jövő energiaforrása*, Heves Megyei Önkormányzat Pedagógiai Intézete, Eger, 2004.
- [24] <http://www.nyf.hu/others/html/kornyezettud/megujulo/vizenergia/Vizenergia.html> (Utolsó letöltés: 2021. december 8.)
- [25] <https://www.mgte.hu/geotermikus-villamosenergia-termeles/>
- [26] <https://napraforgo-brikett.hu/fa-futoertek-tablázat/> (Utolsó letöltés: 2025. március 25.)
- [27] https://www.hds.bme.hu/letoltesek/targyak/BMEGEENAEK6/VH_foliak_1_2_3.pdf
- [28] <https://x-engineer.org/wave-energy/>
- [29] <https://slideplayer.hu/slide/11926176/>
- [30] <https://greendex.hu/geotermikus-energia/>
- [31] <https://greendex.hu/biomassza/>
- [32] <https://tibortomacs.github.io/latex-tutorial-hu/latex.pdf>